第　1　問

すべての正の実数 x, y に対し

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x + y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

第　2　問

$f(x) = 1 - \sin x$ に対し，$g(x) = \int_0^x (x - t) f(t)\,dt$ とおく。
このとき，任意の実数 x，y について

$$g(x + y) + g(x - y) \geqq 2\,g(x)$$

が成り立つことを示せ。

第　3　問

二辺の長さが1と2の長方形と一辺の長さが2の正方形の2種類のタイルがある。縦2，横nの長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える。そのような並べ方の総数をA_nで表す。ただしnは正の整数である。たとえば$A_1 = 1$，$A_2 = 3$，$A_3 = 5$である。このとき以下の問に答えよ。

(1)　$n \geqq 3$のとき，A_nをA_{n-1}，A_{n-2}を用いて表せ。

(2)　A_nをnで表せ。

第　4　問

N を正の整数とする。N の正の約数 n に対し

$$f(n) = n + \frac{N}{n}$$

とおく。このとき，次の各 N に対して $f(n)$ の最小値を求めよ。

(1)　$N = 2^k$，ただし k は正の整数

(2)　$N = 7\,!$

第 5 問

サイコロを n 回投げて，xy 平面上の点 P_0，P_1，…，P_n を次の規則(a)，(b)によって定める。

(a) $P_0 = (0,\ 0)$

(b) $1 \leqq k \leqq n$ のとき，k 回目に出た目の数が 1，2，3，4 のときには，P_{k-1} をそれぞれ東，北，西，南に $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ だけ動かした点を P_k とする。また k 回目に出た目の数が 5，6 のときには $P_k = P_{k-1}$ とする。ただし y 軸の正の向きを北と定める。

このとき以下の問に答えよ。

(1) P_n が x 軸上にあれば，P_0，P_1，…，P_{n-1} もすべて x 軸上にあることを示せ。

(2) P_n が第 1 象限 $\{(x,\ y) \mid x > 0,\ y > 0\}$ にある確率を n で表せ。

第　6　問

原点をOとする xy 平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

上の点Pにおける接線と2つの漸近線との交点をQ，Rとする。このとき以下の問に答えよ。

(1) 三角形OQRの面積 S は，点Pのとり方にはよらず，a，b によって定まることを示せ。

(2) $a = 5e^{2t} + e^{-t}$，$b = e^{2t} + e^{-t}$ として実数 t を変化させるときの S の最小値を求めよ。